Anillo de series formales y Semigrupos reales simétricos

M. Dickmann y A. Petrovich

Ordenes en anillos

Un orden en un anillo conmutativo unitario A es un subconjunto $P \subseteq A$ tal que (a) $P + P \subseteq P, (b)$ $PP \subseteq P, (c)$ $P \cup -P = A$ y (d) $P \cap -P$ es un ideal primo de P. Los ordenes también se denominan *preconos primos*. Un subconjunto T de A que satisface (a), (b) y $A^2 \subseteq T$ se dice un *preorden*.
Los preconos primos de A están en correspondencia biunívoca con los pares de la forma (I, Q) donde I es un ideal primo de A y Q es un orden del cuerpo de fracciones del cociente A/I.

El conjunto de preconos primos de A se llama el *espectro real* de A y es denotado por $Sper(A)$. Dado un preorden propio T de A, $Sper_T(A) = \{P \in Sper(A) : T \subseteq P\}$.

El semigrupo asociado a un anillo y a un preorden

.

Dado un anillo conmutativo unitario A y un preorden T propio de A, se define para cada $a \in A$, la siguiente función $\overline{a} : Sper_T(A) \to \mathbf{3}$ como sigue:

$$\overline{a}(P) = \begin{cases} 1 & si \;\; a \in P \backslash P \cap -P \\ 0 & si \;\; a \in P \cap -P \\ -1 & si \;\; -a \in P \backslash P \cap -P \end{cases}$$

donde $\mathbf{3} = \{-1, 0, 1\}$. Si $a \in \mathbf{3}$ entonces $\overline{a}$ es la función constante a. Más aún dados $a, b \in A$ entonces $\overline{ab} = \overline{a} \cdot \overline{b}$. Por lo tanto $G_{A,T} = \{\overline{a} : a \in A\}$ es un semigrupo conmutativo unitario, con dos constantes distinguidas $\overline{0}, \overline{-1}$ que satisface las siguientes tres condiciones para todo $a \in A$:
(1) $\overline{a}^3 = \overline{a}$, (2)$\overline{a} \cdot \overline{0} = \overline{0}$ y (3) $\overline{a} = -\overline{a} \Rightarrow \overline{a} = \overline{0}$.
Todo semigrupo conmutativo unitario que satisface estas condiciones se denomina *semigrupo ternario*.

Las Relaciones de Representación y Representación Transversal

Definición

Sea A un anillo conmutativo unitario A y T un preorden propio de A. Si $\overline{c}, \overline{a}, \overline{b} \in G_{A,T}$ diremos que $\overline{c} \in D_{G_{A,T}}(\overline{a}, \overline{b})$ si existen $c' \in A$ y elementos $t_1, t_2 \in T$ tales que $\overline{c} = \overline{c'}$ y $c' = t_1 a + t_2 b$. Diremos que $\overline{c} \in D^t_{G_{A,T}}(\overline{a}, \overline{b})$ si existen $a', b', c' \in A$ tales que $\overline{c} = \overline{c'}, \overline{a} = \overline{a'}, \overline{b} = \overline{b'}$ y $c' = a' + b'$. Las relaciones $D_{G_{A,T}}$ y $D^t_{G_{A,T}}$ se definen respectivamente *relaciones de representación* y *representación transversal.*

Teorema 1

Dados $a, b, c \in A$ las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) $\overline{c} \in D_{G_{A,T}}(\overline{a}, \overline{b})$.

(2) Para todo $P \in Sper_T(A)$ $\overline{c}(P) = 0$ o $\overline{c}(P)\overline{a}(P) > 0$ o $\overline{c}(P)\overline{b}(P) > 0$.

Teorema 2

Dados $a, b, c \in A$ las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) $\overline{c} \in D^t_{G_{A,T}}(\overline{a}, \overline{b})$.

(2) Para todo $P \in Sper_T(A)$ $\overline{c}(P) = 0$ y $\overline{a}(P) = -\overline{b}(P)$ o $\overline{c}(P)\overline{a}(P) > 0$ o $\overline{c}(P)\overline{b}(P) > 0$.

(3) $\overline{c} \in D_{G_{A,T}}(\overline{a}, \overline{b}) \wedge -\overline{a} \in D_{G_{A,T}}(-\overline{c}, \overline{b}) \wedge -\overline{b} \in D_{G_{A,T}}(\overline{a}, -\overline{c})$

Semigrupos reales

Dada una relación ternaria D escribimos $a \in D(b,c)$ en lugar de $D(a,b,c)$. También definimos $a \in D^t(b,c)$ si y sólo si $a \in D(b,c) \wedge -b \in D(-a,c) \wedge -c \in D(b. -a)$.
Un *semigrupo real* es un semigrupo ternario munido de una relación ternaria D que verifica los siguientes axiomas: [RS0]

$c \in D(a,b) \Leftrightarrow c \in D(b,a)$, [RS1] $a \in D(a,b)$

[RS2] $a \in D(b,c) \Rightarrow ad \in D(bd,cd)$

[RS3] $a \in D(b,c) \wedge c \in D(d,e) \Rightarrow \exists x(x \in D(b,d) \wedge a \in D(x,e)$

[RS4] $e \in D(c^2a, d^2b) \Rightarrow e \in D(a,b)$, [RS5]
$ad = bd \wedge ae = be \wedge c \in D(d,e) \Rightarrow ac = bc$

[RS6] $c \in D(a,b) \Rightarrow c \in D^t(c^2a, c^2b)$, [RS7]
$D^t(a,-b) \cap D^t(b,-a) \neq \emptyset \Rightarrow a = b$

[RS8] $a \in D(b,c) \Rightarrow a^2 \in D(b^2,c^2)$

Ejemplos

1) Si A es un anillo conmutativo unitario $(G_A, \cdot, 1, 0, -1, D_{G_A})$ es un semigrupo real.

2) El semigrupo $\mathbf{3} = \{-1, 0, 1\}$ tiene una única estructura de semigrupo real donde

$$D_{\mathbf{3}}(0,0) = \{0\}, D_{\mathbf{3}}(0,1) = D_{\mathbf{3}}(1,0) = D_{\mathbf{3}}(1,1) = \{0,1\},$$

$$D_{\mathbf{3}}(0,-1) = D_{\mathbf{3}}(-1,0) = D_{\mathbf{3}}(-1,-1) = \{-1,0\}, D_{\mathbf{3}}(1,-1) = \mathbf{3}$$

3) Si X es un espacio booleano, $P = Cont(X, \mathbf{3})$ es un semigrupo real donde la relación de representación se define como sigue: $f \in D(h, g)$ si y sólo si $h \wedge g \wedge 0 \leq f \leq h \vee g \vee 0$. (Algebras de Post).

Caracteres

Dado un semigrupo real G, un *carácter* es un morfismo $h : G \to \mathbf{3}$ de semigrupos ternarios que preserva la relación de representación, es decir $a \in D_G(b,c) \Rightarrow h(a) \in D_{\mathbf{3}}(h(b),h(c))$.
Si X_G es el espacio de caracteres de G se define en X_G la topología que tiene como base a los conjuntos de la forma:

$$U(a_1,\ldots,a_n) = \{h \in X_G : h(a_1) = \ldots = h(a_n) = 1\}$$

donde $a_1,\ldots,a_n \in G$. Entonces X_G con esta topología es un *espacio espectral*. El orden de especialización $\rightsquigarrow$ está dada por la siguiente relación: $g \rightsquigarrow h$ si y sólo si $h = h^2 g$.
Propiedad crucial: si $a,b,c \in G$ entonces $a \in D_G(b,c)$ si y sólo si $h(a) \in D_{\mathbf{3}}(h(b),h(c))$ para todo $h \in X_G$.

Caracteres y preconos primos

Si A es un anillo conmutativo unitario, entonces los caracteres de G_A se corresponden con los preconos primos de A como sigue:
Dado $P \in Sper(A)$, entonces P induce un carácter $h_P \in X_{G_A}$ definido por $h_P(\overline{a}) = \overline{a}(P)$ para todo $a \in A$. (Función evaluación).
Más aún la correspondencia $P \mapsto h_P$ es una biyección entre $Sper(A)$ y X_{G_A}.
Por otro lado si $P, Q \in Sper(A)$ entonces $P \subseteq Q$ si y sólo si $h_P \rightsquigarrow h_Q$.

Fanes

Una clase importante de semigrupos reales son los denominados fanes. Sea $(G, \cdot, 1, 0, -1)$ un semigrupo ternario tal que para todo $a, b \in G$ $a^2 b^2 = a^2$ o $a^2 b^2 = b^2$ Esta condición se denomina la condición [Z]. Dado $a \in G$ definimos

$$Z(a) = \{h \in \chi_G : h(a) = 0\}$$

donde χ_G es el conjunto de caracteres de semigrupos ternarios sobre G. La condición [Z] es equivalente a decir $Z(a) \subseteq Z(b)$ o bien $Z(b) \subseteq Z(a)$.

Teorema 1 Todo semigrupo ternario que satisface la condición [Z] admite una estructura de semigrupo real definiendo la relación de representación transversal como sigue:

$$D_G^t(a,b) = \begin{cases} \{a\} & si\ Z(a) \subset Z(b) \\ \{b\} & si\ Z(b) \subset Z(a) \\ \{a,b\} & si\ Z(a) = Z(b) \wedge a \neq -b \\ a^2 G & si\ \text{a = -b} \end{cases}$$

Los semigrupos reales cuya relación de representación satisfacen esta fórmula se denominan *fanes*

Teorema 2 Sea G un semigrupo real que satisface la condición [Z]. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) G es un fan.

(2) Si $h_1, h_2, h_3 \in X_G$ entonces $h_1 h_2 h_3 \in X_G$.

Anillo de series formales

Dado un cuerpo formalmente real (ordenable) y un grupo abeliano totalmente ordenado G, $F[[G]]$ denota el anillo de series formales con coeficientes en F y exponentes en el conjunto G^+ de elementos no negativos de G, es decir $F[[G]]$ consiste del conjunto de funciones de G^+ en F que tienen soporte bien ordenado. Los elementos de $F[[G]]$ se escriben de la manera usual como $\sum_{g\in G^+} s_g X^g$, y resulta un anillo conmutativo unitario con las operaciones definidas por:

$$a+b=\sum_{g\in G^+}(a_g+b_g), a\cdot b=\sum_{g\in G^+} c_g X^g$$

donde $c_g=\sum_{f,h\in G^+,f+g=h} a_f b_h$. La valuación canónica en $F[[G]]$ se define como $v(\sum_{g\in G^+} s_g X^g)=min\ sop(\sum_{g\in G^+} s_g X^g)$.

El espectro real de $F[[G]]$

Teorema
(1) Si C es un subgrupo convexo de G, entonces
$I_C = \{s \in F[[G]] : v(s) > C\} \cup \{0\}$ es un ideal primo de $F[[G]]$.
Más aún todo ideal primo de $F[[G]]$ es del tipo I_C para cierto subgrupo convexo C de G.

(2) Todo ideal primo de $F[[G]]$ es real.

(3) El conjunto de los ideales primos de $F[[G]]$ está totalmente ordenado por inclusión.

Los elementos de $Sper(F[[G]])$ vienen dados por 3 componentes: (A) Los subgrupos convexos de G, (B) Los órdenes de F y (C) Los subgrupos de un subgrupo convexo que tienen índice a lo sumo 2. Más precisamente tenemos el siguiente resultado:

Teorema Dado un subgrupo convexo C de G, un subgrupo H de C tal que $[C : H] \leq 2$ y un orden P de F, entonces

$$\alpha_{P,C,H} = I_C \cup \{a \in F[[G]] : v(a) \in H \ y \ a_{v(a)} >_P 0\} \cup$$

$$\cup \{a \in F[[G]] : v(a) \in C \backslash H \ y \ a_{v(a)} <_P 0\}$$

es un elemento de $Sper(F[[G]])$.

Más aún todo precono primo de $F[[G]]$ es de la forma $\alpha_{P,C,H}$.

La siguiente propiedad es fundamental

Dados P_1, P_2 órdenes de F, C_1, C_2 subgrupos convexos de G y H_1, H_2 subgrupos de C_1 y C_2 respectivamente tales que $[C_1 : H_1] \leq 2$ y $[C_2 : H_2] \leq 2$ entonces

$$\alpha_{P_1,C_1,H_1} \subseteq \alpha_{P_2,C_2,H_2} \Leftrightarrow P_1 = P_2, C_2 \subseteq C_1 \wedge H_2 = H_1 \cap C_2$$

En particular,
$\alpha_{P_1,C_1,H_1} = \alpha_{P_2,C_2,H_2} \Leftrightarrow P_1 = P_2, C_2 = C_1 \wedge H_2 = H_1$.

Propiedades destacables de G_A, donde $A = F[[G]]$

.

1) G_A satisface la condición [Z].

2) El conjunto de los elementos inversibles de G_A, notado por G_A^* es isomorfo al grupo *especial reducido* $F^\times/(\sum F^2)^\times$.

3) G_A es un fan como semigrupos reales si y sólo si el cuerpo F es un fan. (Un cuerpo F es un fan si la diferencia simétrica de tres órdenes es un orden).)

4) Para todo carácter $h \in X_{G_A}$ existe un carácter $h_0 \in X_{G_A}$ tal que $Z(h_0) = \{\bar{0}\}$ y $h_0 \rightsquigarrow h$.

5) Sean $h_1, \ldots, h_n \in X_{G_A}$ tales que $Z(h_i) = M$ para todo $1 \leq i \leq n$ y $\prod_{i=1}^{n} h_i \in X_{G_A}$, donde M es el ideal maximal de G_A. $(M = G_A \backslash G_A^*)$. Entonces si $g_1, \ldots, g_n \in X_{G_A}$ y $g_i \rightsquigarrow h_i$ para todo i se tiene que $\prod_{i=1}^{n} g_i \in X_{G_A}$. (Principio de coherencia).

Semigrupos reales simétricos

Las propiedades destacables del semigrupo real asociado a un anillo de series formales conducen a la siguiente definición de carácter general:

Definición.
Un semigrupo real G se dice *simétrico* si satisface los siguientes axiomas:

(1) La condición [Z].

(2) Si $h \in X_G$ entonces existe $h_0 \in X_G : Z(h_0) = \{0\}$ y $h_0 \rightsquigarrow h$.

(3) Si $h \in X_G$ entonces existe $h_M \in X_G : Z(h_M) = G \backslash G^*$ y $h \rightsquigarrow h_M$.

(4) (Principio de coherencia)

Teorema 1 : Si G es un semigrupo real simétrico entonces dado un carácter $h \in X_G : X(h) = M$, donde M es el ideal maximal, se tiene que la componente conexa asociada a h, P_h, es un fan, donde dicha componente es

$$P_h = \{h' \in X_G : h' \rightsquigarrow h\}$$

Más aún dos componentes conexas son isomorfas (como espectros reales abstractos).

Teorema 2: Si G es un semigrupo real simétrico y finito entonces existe un cuerpo F y un grupo abeliano totalmente ordenado G' tal que G es isomorfo a G_A, donde $A = F[[G']]$. El resultado es falso si G es infinito.
Sin embargo, a pesar que no todo semigrupo real simétrico es *representable* por un anillo de series formales, sí es cierto que todo semigrupo real simétrico es isomorfo a una *extensión* de un grupo especial reducido por un 3-semigrupo.

Un 3-semigrupo Δ es un semigrupo conmutativo unitario que satisface la identidad $x^3 = x$ para todo $x \in \Delta$. Dado un grupo G de exponente 2 definimos

$$G[\Delta] = G \times \Delta \cup \{0\}$$

donde 0 es un elemento que no pertenece a $G \times \Delta$. If $x, y \in G[\Delta]$ definimos la siguiente operación $\cdot$ in $G[\Delta]$ como sigue:

$$x \cdot y = \begin{cases} 0 & \textit{if } x = 0 \vee y = 0 \\ (gg', dd') & \textit{if } x = (g, d) \wedge y = (g', d') \end{cases}$$

Teorema

:

Sea G un grupo de exponente 2 con un elemento distinguido -1 y sea Δ un 3-semigrupo. Si $\hat{1}$ es la unidad de Δ. Entonces $(G[\Delta], \cdot, (1, \hat{1}), (-1, \hat{1}), 0)$ es un semigrupo ternario. Más aún, si Δ satisface la condición [Z] entonces $G[\Delta]$ también la satisface. Más aún, si G es un grupo especial reducido, entonces $G[\Delta]$ admite una estructura de semigrupo real, denominada la *extensión de G por Δ*. Más aún, todo semigrupo real simétrico es isomorfo a una extensión del grupo real reducido determinado por sus elementos inversibles y cierto 3-semigrupo.